

**Zeitvarianz und Zeitinvarianz-  
Mathematische Untersuchungen  
zum Zeitverhalten des Produktlebenszyklus**

von Prof. Dr. Herold und Kerstin Polzin

ARBEITSPAPIER DER IUBH DUALES STUDIUM

Prof. Dr. Jörg Herold und Kerstin Polzin

## **Zeitvarianz und Zeitinvarianz –**

# **Mathematische Untersuchungen zum Zeitverhalten des Produktlebenszyklus**

**IUBH Duales Studium**

**Arbeitspapier Nr. 7  
05/2011**

## **Zusammenfassung**

Genauere Prognosen von Absatzmöglichkeiten und Marktpotenzialen für Innovationen können heute ein entscheidender Faktor sein, um sich auf dem Markt zu behaupten. Ein verspäteter Markteintritt kann gravierende Auswirkungen auf den Umsatz und somit auf den Erfolg des Unternehmens haben. Dieser Einfluss entsteht durch die grundsätzliche Zeitvarianz des Produktlebenszyklus. Ein funktionaler Ansatz und ein dynamisches System werden zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens verwendet. Zeitinvariantes Verhalten des Produktlebenszyklus entsteht unter den Voraussetzungen, dass alle inneren und äußeren Randbedingungen (Marktpotenzial, Mundpropaganda, Einwirkungen der Konkurrenz auf den Markt) vom Unternehmen zeitlich konstant oder mindestens präparierbar sind. Da in der betrieblichen Realität diese Voraussetzungen nicht erfüllbar sind, entsteht eine Zeitinvarianz des Produktionszyklus.

## **Abstract**

Accurate forecasts of sales opportunities and market potential for innovation today can be a decisive factor in order to compete in the market. A belated entry may have a serious impact on revenues and consequently on the success of the company. This influence is caused by the fundamental time variance of the product life cycle. A functional approach and a dynamic system can be used to describe the temporal behavior. Time-invariant behavior of the product life cycle is formed under the conditions that all internal and external conditions (market potential, word of mouth, effects of competition on the market) by the Company are prepared in this or at least constant in time. As in the operational reality, these conditions are not feasible, results in time invariance of the production cycle.

JEL-Klassifikation: C 53; D 91; E 27; M 31; M 37

Schlüsselwörter: Produktlebenszyklus; Innovationsmanagement; Dynamic Systems; Zeitvarianz; Zeitinvarianz

## 1 Zeitliche Aussagen des Innovationsmanagements

Für die zielgerichtete Entwicklung von Unternehmen sind möglichst genaue Prognosen der Absatzmöglichkeiten und Marktpotenziale neuer Produkte notwendig. Gute Ideen als Erster auf den Markt zu bringen, kann heute ein entscheidender Faktor sein, um sich dann auf dem Markt zu behaupten. Zunehmender Konkurrenzdruck zwingt Unternehmen innovative Lösungen in kurzer Zeit zu produktionsreifen Lösungen zu entwickeln. Welche Auswirkungen hat es, wenn eine Innovation einen verspäteten Markteinführungstermin hat oder ein Wettbewerber ein neues Produkt früher auf den Markt bringt? In der Literatur werden solche Fragestellungen im Rahmen des Innovationsmanagements (Stern 2010, S.30) und Erfahrungskurvenkonzepts (Henderson 1974, S. 23) untersucht. Grundsätzlich wird festgestellt, dass mit einem höheren Marktanteil ein größeres Kostensenkungspotenzial verbunden ist. Dies führt zu größeren Gewinnspannen und Wettbewerbsvorteilen (Wöhe 2010, S. 143 ff.). Im Regelfall werden diese Kostenminderungen durch Preissenkungen (Preiserfahrungskurve) an die Kunden weitergegeben (Meffert 1991, S. 65 ff.). Das erste seine Güter auf dem Markt anbietende Unternehmen wird gegenüber der Konkurrenz höhere Marktanteile und Kostenrückgänge sowie schließlich Gewinne erreichen und damit wettbewerbsfähiger sein. Am Beispiel des Produktlebenszyklus werden diese zeitlichen Abhängigkeiten des Markteintritts mathematisch untersucht.

## 2 Zeitvarianz und Zeitinvarianz

Für künftige Entwicklungen des Marktes werden für die Produktlebenszyklusanalyse zeitabhängige Funktionen, iterative Verfahren (Weiber 1993, S. 35) oder dynamische Modelle (Bossel 2004, S. 16) verwendet. Diese Prognosemodelle haben gemeinsam, dass zu ihrer Beschreibung allgemeingültige, zeitinvariante Gesetze (Allgesetze) erforderlich sind.

Zeitinvarianz bedeutet, dass ein zu jedweder Zeit begonnener Prozess immer das gleiche Verhalten zeigt. Er kann damit zu jedem beliebigen Zeitpunkt starten, ohne dass sich eine Ergebnisänderung ergibt. Die Parameter seiner mathematischen Beschreibung sind zeitlich unveränderlich (invariant).

Ein allgemeingültige Gesetz ist durch eine deduktive und nomologische Erklärung oder Formel definiert. Es beschreibt den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung. Aus einem solchen generalisierten Gesetz wird der Einzelfall durch Anwendung eines Syllogismus (Russell 2009, S. 221) abgeleitet. Der zu untersuchende Sachverhalt wird durch die Herbeiführung der vom Gesetz erforderlichen exakten Randbedingungen hergestellt, sodass sich das Ergebnis

immer einstellt. Dieses Präparieren zusammen mit den Allgesetzen erlaubt es, konkrete Prognosen für das Geschehen zu ermitteln (Kornwachs 2001, S. 158).

Das Prinzip des Syllogismus wird am Beispiel des Produktlebenszyklus dargestellt.

**Obersatz:** Alle Produkte ( $P(x)$ ) haben einen endlichen Produktlebenszyklus ( $E(x)$ ).

$$x[P(x) \rightarrow E(x)]$$

**Untersatz:** Es wird das Erzeugnis ( $d$ ) produziert und verkauft.

$$x [x = d \wedge P (d)]$$

**Schlussfolgerung:** Das Erzeugnis hat einen endlichen Produktlebenszyklus.

$$\{ \forall x [P(x) \rightarrow S (x)] \} \wedge \{ \exists x [x = d \wedge P (d)] \} \rightarrow E (d)$$

Prozesse, die die oben beschriebene Eigenschaft nicht besitzen, sind zeitvariant. Sie zeigen zu verschiedenen Zeiten unterschiedliche Resultate. Dieses zeitvariante Verhalten ist eine besondere Eigenschaft betrieblicher Systeme und begründet sich auf folgenden Eigenschaften (Grochla 1977, S. 48 – 53):

- Betriebliche Abläufe sind nicht ausschließlich determiniert.
- Es treten externe und interne Störgrößen auf, welche die Anfangs- und Randbedingungen im Unternehmen ständig verändern können. Handelt es sich um äußere Faktoren des Betriebs, ist eine vollständige Präparation nicht möglich.
- Der Mensch als Produktionsfaktor verändert durch seine Entscheidungen die betrieblichen Abläufe. Durch die Fähigkeit der Anpassung seiner Entscheidungen nimmt er wesentlichen Einfluss auf die Veränderung der Störgrößen.

Für reale Produktlebenszyklen werden in den folgenden Kapiteln die Aspekte und Gründe der zeitlichen Varianz mathematisch untersucht. Dabei werden mathematische Ansätze wie zeitabhängige Funktionen, iterative Verfahren und dynamische Modelle verwendet.

### **3 Semilogistisches Diffusionsmodell zur Beschreibung des Produktlebenszyklus**

Wichtigste Aufgabe der Produktpolitik ist die Entwicklung und Vermarktung neuer Produkte. Der Verkauf von Produktinnovationen muss über einen bestimmten Zeitraum erfolgreich sein, damit sich die Investitionen amortisieren und ein Gesamtgewinn erzielt wird. Die Produktpolitik gibt gute und zutreffende Prognosen darüber ab, ob betriebswirtschaftliche Ziele erreicht werden. Für eine evolutionäre Wirtschaft wird der Absatz von Produktinnovationen allerdings begrenzt sein: Es entsteht ein Produktlebenszyklus.

Die Forschung zur Durchsetzungsfähigkeit von Produkten hat eine lange Tradition (Rogers 2003, S. 39). Nach R. Weiber (Weiber 1993, S. 35) sind insbesondere folgende Fragen von Interesse:

1. Welche Faktoren beeinflussen die zeitliche Entwicklung des Produktes?
2. Welcher Ausbreitungsverlauf innerhalb der Abnehmer ist festzustellen und mit welcher Geschwindigkeit laufen die Prozesse ab?

Zur Beschreibung findet häufig das Diffusionsmodell (von Innovationen) von Bass Anwendung (Weiber 1993, S. 35), das den Produktlebenszyklus ab der Markteinführung innovativer Produkte unter Berücksichtigung von Innovations- und Imitationseffekten beschreibt (Bass 1969, S. 215 ff.).

Der Absatz wird als Funktion der Zeit beschrieben. Sie enthält für die Schätzung der Verkäufe Innovations- und Imitationskoeffizienten, die den Anteil von Erstkäufen aufgrund der Neuartigkeit des Produktes (Innovatoren) bzw. seiner Verbreitung (Imitatoren) angeben. Innovatoren werden durch externe Einflüsse wie z. B. Werbung und Imitatoren durch interne Einflüsse wie z. B. Mundpropaganda zum Kauf angeregt. Im Modell wird von einer potenziellen Käufergruppe ausgegangen, die das Produkt einmal kaufen wird.

Zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Prozessen und Systemen wie dem Produktlebenszyklus werden klassischerweise Funktionen mit der Zeit als unabhängige Variable verwendet. Der analytische Ansatz erlaubt die Berechnung eines Systemzustandes zu einem beliebigen Zeitpunkt und gibt zusätzliche Informationen zum zeitlichen Ablauf der Systemaktionen (Forrester 1972, S. 82). Die Diffusion von Innovationen ist aber meistens so komplex und ihre Wechselwirkungen teilweise nichtlinear (Forrester 1972, S. 85), dass eine mathematische Beschreibung mittels einer Funktion unmöglich wird. In solchen Fällen werden Systemsimulationen verwendet, die die Lösungen iterativ berechnen (Herold et al. 2010, S. 7).

### 3.1 Mathematisch-analytische Beschreibung

Die mathematisch-analytische Beschreibung des Bass-Diffusionsmodells kann mit einer Exponentialfunktion der Form  $N = N(t)$  beschrieben werden ((Bass 1969, S. 220 ff.):

$$N(t) = \frac{M(1 - e^{-(p+q)t})}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \quad (1)$$

$$N(t) = M * f(t)$$

mit  $f(t) = \text{Verteilungsfunktion des Produktlebenszyklus}$  und  $t = \text{Zeit}$

Die Berechnung der Anzahl der Kunden, die das Produkt gekauft haben, ergibt sich durch einfaches Einsetzen. Solche Darstellungen zeichnen sich durch unveränderliche Parameter ( $p$ ,  $q$ ,  $M$ ) aus. In der eindimensionalen Darstellungsform ist die Zeit die einzige unabhängige Einflussgröße, alle anderen sind eliminiert. Eine weitere Konsequenz der Verwendung von Gleichungen ist die Behauptung der zeitlichen Determiniertheit des Produktlebenszyklus.

### 3.2 Dynamisches Systemmodell des Produktlebenszyklus

#### 3.2.1 Mathematisch-iterative Beschreibung

Zur Gewinnung komplexerer Informationen sowie Zusammenhänge im Bereich des Produktlebenszyklus wird die iterative mathematische Beschreibung des Bass-Diffusionsmodells verwendet (Weiber 1993, S. 35):

$$n_t = p * (M - N_{t-1}) + q * N_{t-1} / M * (M - N_{t-1}) \text{ und } N_t = N_{t-1} + n_t \quad (2)$$

$p * (M - N_{t-1})$  = exponentieller Term

$q * N_{t-1} / M * (M - N_{t-1})$  = logistischer Term

$M$  = Marktpotenzial

$p$  = Koeffizient der externen Einflüsse (Innovationskoeffizient)

$q$  = Koeffizient der internen Einflüsse bei den Käufern (Imitationskoeffizient)

$t$  = Rechenschritt oder Zeitintervall

$N_t$  = kumulierte Käuferzahl

$n_t$  = Neukäufer im Intervall  $(t - (t-1))$

Der Rechenschritt ist mit einer Zeitspanne gleichzusetzen. Zur Berechnung der Anzahl der Kunden, die das Produkt über eine Zeitspanne gekauft haben, wird die Berechnung wiederholt. Die iterative Form (2) besteht aus zwei Termen. Der erste und exponentielle Term berücksichtigt die externen Wirkungen auf die potenziellen Kunden. Der zweite und logistische Term beschreibt den Einfluss innerhalb der Käuferschaft, insbesondere durch Mundpropaganda (Imitatoren). Die Korrelation an die Messdaten erfolgt durch Veränderung des Innovationskoeffizienten ( $p$ ), des Imitationskoeffizienten ( $q$ ) und des Marktpotenzials ( $M$ ). Die Ausbreitung der Innovation wird schrittweise berechnet, wobei jeder Rechenschritt einem Zeitintervall entspricht. Damit kann geschlussfolgert werden, dass die Ausbreitung der Innovation einem zeitlichen Verlauf folgt. Iterative Verfahren erlauben es, deterministische, zufällige und deterministisch-chaotische Einflüsse sukzessive (schrittweise) zu berücksichtigen (Herold et al. 2010, S. 7 ff.).

### 3.2.2 Theorie des dynamischen Systems

Zur Untersuchung des komplexen Verhaltens des Produktlebenszyklus (Herold et al. 2010, S. 7) wird auf die Modellbildung, Analyse und Simulation komplexer dynamischer Systeme zurückgegriffen (Bossel 2004, S. 35). Systeme sind durch Systemelemente und eine essenzielle Wirkungsstruktur gekennzeichnet, die ihnen eine Systemzweck und Systemidentität definierende Erfüllung bestimmter Funktionen gestattet.

Ein System verfügt über folgende Merkmale:

1. Es erfüllt einen bestimmten und ersichtlichen Systemzweck.
2. Ein bestimmter Zusammenhang von Systemelementen und Wirkungsverknüpfungen bestimmt seine Funktionen.
3. Die Systemidentität geht durch den Verlust von Systemteilen und Verknüpfungen verloren.

Ein System eine Anzahl miteinander in Beziehung stehender Teile, die zu einem gemeinsamen Zweck miteinander operieren (Forrester 1972, S. 9).

Das Modell zur Beschreibung des Produktlebenszyklus von Bass benötigt die Systemelemente *Unternehmen* und *potenzielle Kunden*. Kunden und Unternehmen sind miteinander verknüpft. Die Wirkungsverknüpfungen werden durch die Formel (1) oder iterative Verfahren (2) beschrieben. Der Verlust eines der beiden Elemente führt zur Zerstörung des Systems, während es durch Einbeziehung weiterer Betriebe (Staat und Ausland) hingegen erweitert werden kann.

Ein System besteht aus den voneinander abgrenzbaren Elementen, einer Struktur und Rückkopplungen. Eine Systemgrenze trennt es von der Umwelt, mit der Eingangs- und Ausgangsgrößen austauscht werden (Bossel 2004, S. 36).

Zur Formulierung mathematischer Modelle werden folgende Größen abgeleitet (Bossel 2004, S. 114):

- Vorgabegrößen und Einwirkungen, die auf das System wirken und nicht durch das System beeinflusst werden.
- Zustandsgrößen (Speichergrößen) des Systems, die sich integrativ durch die Zustandsgröße und äußere Einflüsse ergeben.
- Veränderungsrate der Zustandsgröße stellen den Zufluss in oder Abfluss aus der Zustandsgröße dar.
- Zwischengrößen (Wandler) ergeben sich zwischen den Vorgabegrößen und Einwirkungen auf der einen und der Veränderungsrate auf der anderen Seite.

Die folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen den Systemgrößen und dem Modell des Produktlebenszyklus.

Systemgrößen	Zuordnung zum Produktlebenszyklus
Vorgabegrößen und Einwirkungen	Marktpotenzial $M = M(t)$ Innovations- und Imitationskoeffizient $p, q$
Zustandsgrößen des Systems	Zahl der gewonnenen Käufer
Veränderungsrate/Zuflussgröße	Neukäuferzufluss $n_t$ durch Innovatoren und Imitatoren, jeweils zum Zeitpunkt $t$
Zwischengrößen (Wandler)	Innovatorenzufluss $(= p \cdot (M - N_{t-1}))$ Imitatorenzufluss $(= q \cdot N_{t-1} / M \cdot (M - N_{t-1}))$

Tabelle 1: Zuordnung der dynamischen Systemgrößen zum Produktlebenszyklus

Für die grafischen Darstellungen werden Wirkungs- und Simulationsdiagramme verwendet. Das Wirkungsdiagramm beschreibt qualitativ den Zusammenhang der Größen, indem Wirkungsbeziehungen durch Pfeile dargestellt werden. Simulationsprogramme wie z. B. Vensim PLE (Ventena Systems, Inc., 2009) haben die Aufgabe, neben der qualitativen auch eine quantitative Aussage zu geben. Sie verwenden die in Tabelle 2 dargestellte Symbolsprache der dynamischen Systeme (System Dynamics).

Die Zwischengrößen oder Veränderungsrate und Flussgrößen lassen sich durch Eingabe von Funktionen und Rechenanweisungen bestimmen. Für die Zustandsgrößen werden Rechenvorschriften (Integration) verwendet, bei denen sich der neue Wert durch Addition des alten Wertes und der Veränderung bzw. des Zuflusses berechnen lässt. Es wird als Integrationsverfahren von Runge/Kutta bzw. Euler/Cauchy verwendet.

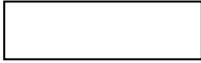
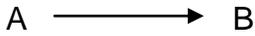
Systemgröße	Symbol
Bestands- oder Zustandsgröße	Rechteck 
Flussgröße oder Veränderungsrate	Blockpfeil mit Ventil 
Zwischen- oder Vorgabegröße	Kreis 
Außenwelt	unregelmäßige Fläche 
Parameter oder exogene Funktionen der Zeit	Sechseck 
Wirkungsbeziehung zwischen zwei Größen, z. B. A wirkt auf B.	Pfeil 

Tabelle 2: Symbolelemente der dynamischen Systeme (vgl. Ventena Systems, Inc. 2009)

In Bezug auf die Entwicklung mathematischer Modelle für dynamische Systeme wird auf das Konzept der Brauchbarkeit von Forrester (1972, S. 78) zurückgegriffen. Die Brauchbarkeit wird im Hinblick auf gedankliche Modelle beschrieben und nicht auf die Perfektion des Modells. Ein Modell wird immer nur einen Teil der Realität darstellen können und darf nicht mit der Wirklichkeit verwechselt werden. Nach Bossel (2004, S. 110) sind unbedingt die essenziellen Strukturen zu suchen, die für das systemtypische Verhalten verantwortlich sind (Bossel 2004, S. 140). Für das logistische Wachstum hat H. Bossel die in der folgenden Abbildung dargestellte Form verwendet (Bossel 2004, S. 139, 140). Die Veränderungsrate ergibt sich zu:  $dx/dt = r \cdot x (1 - x/k) = r \cdot (x/k) (k - x)$ ; Die Konstanten des Systems sind  $k$  und  $r$ .

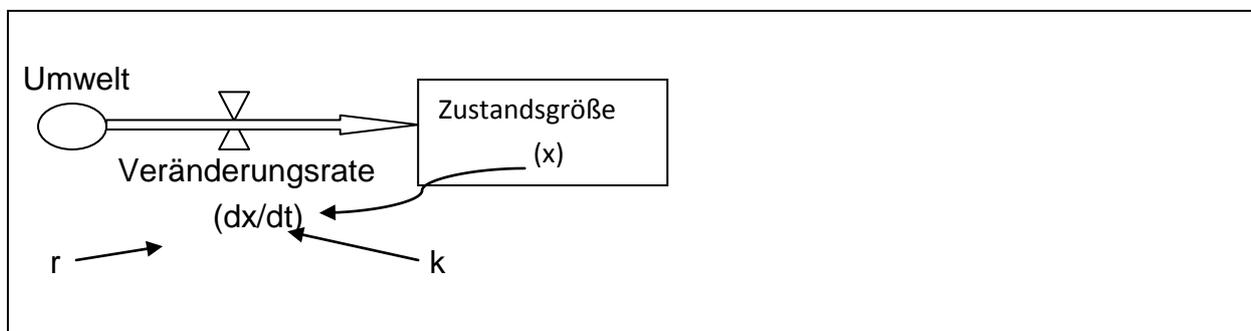


Abb. 1: Darstellung des dynamischen Systems für ein logistisches Wachstum

### 3.2.3 Dynamisches System zur Untersuchung des Zeitverhaltens

Zur Untersuchung des zeitlichen Verhaltens des Produktlebenszyklus wurde das folgende dynamische Modell entwickelt.

#### Modellbeschreibung:

Zwei Betriebe (A und B) haben die gleiche Innovation in ihr Sortiment aufgenommen und verkaufen sie auf demselben Markt. Die Innovation wird von den Käufern nur einmal nachgefragt, sodass sich der Kreis der potenziellen Kunden (Marktpotenzial) reduziert. Die Zahl der Neukäufer setzt sich aus den Innovatoren (Werbung) und den Imitatoren (Mundpropaganda) zusammen (siehe Kapitel 2). Ohne Beschränkung der mathematischen Aussagen werden die Koeffizienten  $p$  und  $q$  als Konstanten behandelt.

#### Die folgenden Punkte werden für den Produktlebenszyklus untersucht:

1. Verläufe für Betrieb A und Betrieb B
2. Einfluss eines verspäteten Markteintrittes
3. Zeitinvarianz beim Angebotsmonopol
4. Zeitvarianz bei Marktkonkurrenz

#### Modellbildung und Beschreibung:

- Durch Einführung von Innovationen werden bestimmte Kundengruppen (potenzielle Kunden) angesprochen, die das Produkt kaufen.
- Der Neukäuferzufluss wird durch das semilogistische Diffusionsmodell von Bass beschrieben (Bossel 2004, S. 139, 140).
- Der Neukäuferzufluss setzt sich aus dem exponentiellen und logistischen Term zusammen. Er erhöht die Zahl der gewonnenen Käufer und verringert die Zahl der potenziellen Kunden (Marktpotenzial). Dieser exponentielle Term ( $p \cdot (M - N_{t-1})$ ), beschreibt den Neukäuferzufluss durch die Innovatoren. Im Modell ist diese Zwischengröße der externe Einfluss. Der logistische Term ( $q \cdot N_{t-1} / M \cdot (M - N_{t-1})$ ) beschreibt den Neukäuferzufluss durch die Imitatoren. Im Modell wird diese Zwischengröße „Mundpropaganda“ genannt.
- Eine Markteintrittsverzögerung wird in das Modell aufgenommen, um die zeitlichen Fragestellungen zu untersuchen. Dazu wird eine bestimmbar Zeitverzögerung des Neukäuferzuflusses für Betrieb A zugelassen.
- Abbildung 2 zeigt das dynamische System zur Untersuchung des zeitlichen Verhaltens des Produktlebenszyklus.

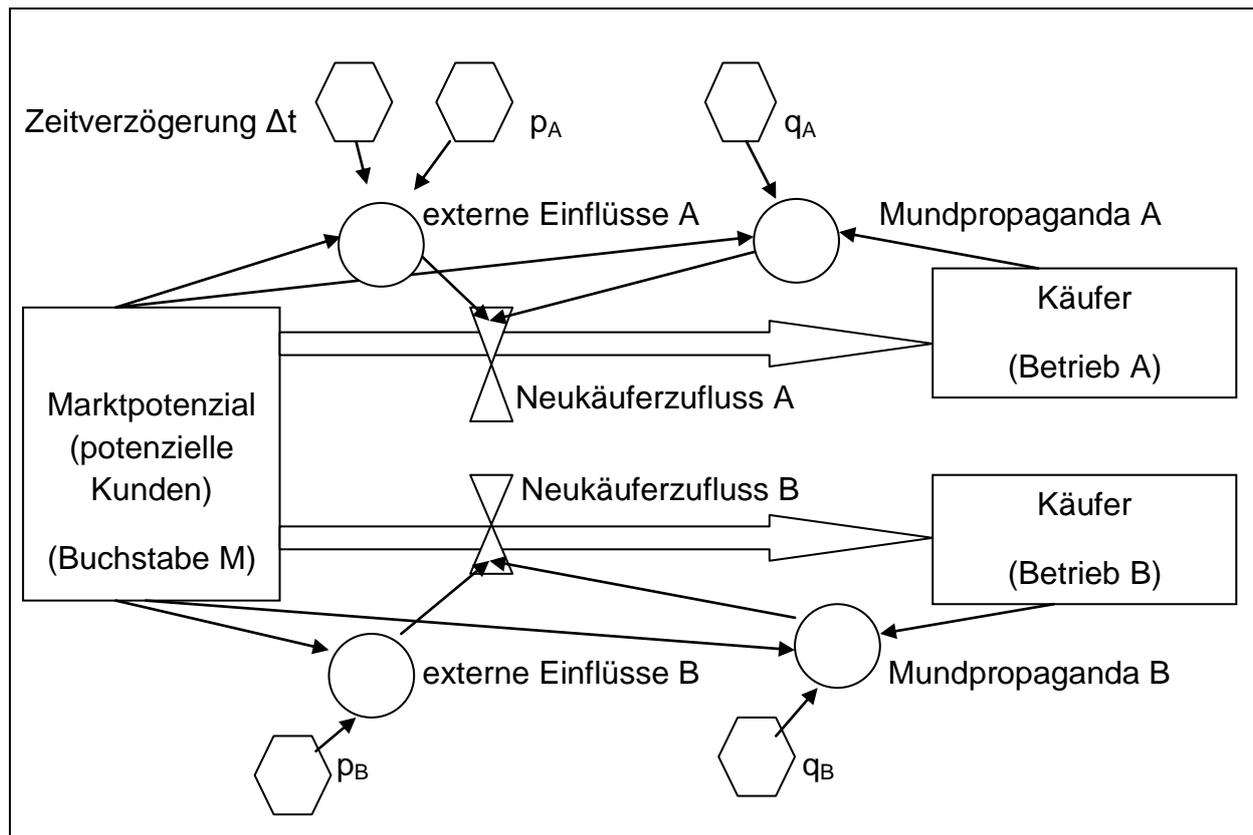


Abb. 2: Dynamisches System zur Untersuchung der zeitlichen Verhalten der Produktlebenszyklen für zwei Betriebe

Die mathematische Umsetzung erfolgt mit dem für akademische Zwecke frei verwendbaren Simulationsprogramm für dynamische Systeme Vensim PLE (Ventena Systems, Inc., 2009). Folgende Formeln wurden hinterlegt:

- [ 1 ] externe Einflüsse A = IF THEN ELSE( $M < 0,0$ ,  $p_B \cdot M$ )
- [ 2 ] externe Einflüsse B = IF THEN ELSE ( $M < 0,0$ ,  $\Delta t \cdot p_A \cdot M$ )
- [ 3 ] INITIAL TIME = 0 und FINAL TIME = 50; Einheiten: Monate
- [ 4 ] Käufer Betrieb A = INTEG (Neukäuferzufluss 1,0)
- [ 5 ] Käufer Betrieb B = INTEG (Zufluss Neukäuferzufluss 2,0)
- [ 6 ] Mundpropaganda A = IF THEN ELSE ( $M < 0,0$ ,  $q_B \cdot (\text{Käufer A}/1e+006) \cdot M$ )
- [ 7 ] Mundpropaganda B = IF THEN ELSE ( $M < 0,0$ ,  $q_A \cdot (\text{Käufer B}/1e+006) \cdot M$ )
- [ 8 ]  $p_A = 0.004$ ;  $p_B = 0.004$ ;  $q_A = 0.02$ ;  $q_B = 0.02$
- [ 9 ]  $M = \text{INTEG} (- \text{Zufluss Neukäuferzufluss A} - \text{Neukäuferzufluss B} = 1e+007)$
- [ 10 ] SAVEPER = TIME STEP und TIME STEP = 1; Einheiten: Monate
- [ 11 ] Zeitverzögerung. Einheiten: Monate
- [ 12 ] Neukäuferzufluss A = externe Einflüsse A + Mundpropaganda A
- [ 13 ] Neukäuferzufluss B = externe Einflüsse B + Mundpropaganda B

## 4 Untersuchungen zum zeitinvarianten und zeitvarianten Verhalten des Produktlebenszyklus

### 4.1 Funktionaler Ansatz

Die mathematische Formulierung ( $N(t) = M \cdot f(t)$ ) der exponentiellen Funktion (2) wird den folgenden Beweisen zugrunde gelegt. Die Ergebnisse der kumulierten Käuferzahl vor und nach einer Verzögerung des Markteintritts werden verglichen, um Aussagen über das Zeitverhalten der Funktion zu gewinnen. Gerechnet wird mit betriebswirtschaftlich sinnvoller endlicher Zeitabschnitt  $\Delta t$ , wobei die Aussagen auch für unendlich kleine Zeitverschiebungen  $dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t$  gültig sind. Ohne Beschränkung der mathematischen Aussagen werden die Koeffizienten  $p$  und  $q$  als Konstanten behandelt.

#### 4.1.1 Zeitinvariantes Verhalten

In diesem Ansatz wird unterstellt, dass die kumulierte Zahl der Kunden ( $N$ ) lediglich von der Zeit abhängig ist. Alle weiteren Größen, insbesondere das Marktpotenzial ( $M$ ), werden als Konstanten angesetzt.

Die Zeitinvarianz wird in folgenden Schritten bewiesen:

- I. Verzögerung der Verteilungsfunktion  $f(t)$  um die Zeitdifferenz  $\Delta t$  und  $T = t + \Delta t$   
 $f_1(T) = f(t + \Delta t) \rightarrow$  einsetzen:  $N_1(T) = M \cdot f_1(T) = M \cdot f(t + \Delta t)$
- II. Verzögerung der Ausgangsfunktion  $N(t)$  um die Zeitdifferenz  $\Delta t$   
 $N_2(T) = N_2(t + \Delta t) \rightarrow$  einsetzen:  $N_2(T) = M \cdot f(t + \Delta t)$
- III. Schlussfolgerung:  $\rightarrow N_1(T) = N_2(T)$  da  $M \cdot f(t + \Delta t) = M \cdot f(t + \Delta t)$   
 Die Ausgangsgleichung ( $N(t) = M \cdot f(t)$ ) ist zeitinvariant, da nach der Zeitverzögerung die beiden Ausgangsfunktionen  $N_1(T)$  und  $N_2(T)$  gleich sind.

Diese Invarianz entsteht mathematisch dadurch, dass die Funktion nur von einer Variablen, der Zeit, abhängig ist. Für den Produktlebenszyklus bedeutet die Eigenschaft „Zeitinvarianz“, dass der verspätete Markteintritt zu zeitlichen Verschiebungen des „Neukäuferzuflusses“ und der „kumulierten Käuferzahl ( $N$ )“ führt. Für die zu erwartenden Umsätze ist die Verspätung unkritisch.

### 4.1.2 Zeitvariante Systeme

Rogers (2003, S. 11) beschreibt die Ausbreitung von Produktneuheiten als einen Prozess, während dessen sich das neue Produkt in einem sozialen Netz über die Zeit ausbreitet. Im Verlauf der Zeit ändern sich insbesondere die Zahl der potenziellen Kunden und deren Kaufbereitschaft. Die technische Entwicklung z. B. der Mobiltelefone (Rogers 2003, S. 259) führt ebenfalls dazu, dass bestehende Produkte zu einem späteren Zeitpunkt weniger oder gar nicht mehr nachgefragt werden. Die Zahl der potenziellen Kunden ist eine Funktion der Zeit  $M(t)$ . Zur Beweisführung der Zeitvarianz des Produktlebenszyklus wird in Gleichung (2) die Konstante  $M$  durch die Variable  $M(t)$  ersetzt.

Die Zeitvarianz wird in folgenden Schritten bewiesen:

- I. Verzögerung der Eingangsfunktion um die Zeitdifferenz  $\Delta t$ , mit  $T = t + \Delta t$   
 $f_1(T) = f(t + \Delta t) \rightarrow$  einsetzen:  $N_1(T) = M(t) * f_1(T) = M(t) * f(t + \Delta t)$
- II. Verzögerung der Ausgangsfunktion um die Zeitdifferenz  $\Delta t$   
 $N_2(T) = N_2(t + \Delta t) \rightarrow$  einsetzen:  $N_2(T) = M(t + \Delta t) * f(t + \Delta t)$
- III. Schlussfolgerung:  $\rightarrow N_1(T) \neq N_2(T)$  oder  $M(t) * f(t + \Delta t) \neq M(t + \Delta t) * f(t + \Delta t)$   
 Da die beiden Ausgangsfunktionen  $N_1(T)$  und  $N_2(T)$  ungleich sind, muss auf die Zeitvarianz der Ausgangsgleichung ( $N(t) = M(t) * f(t)$ ) geschlussfolgert werden.

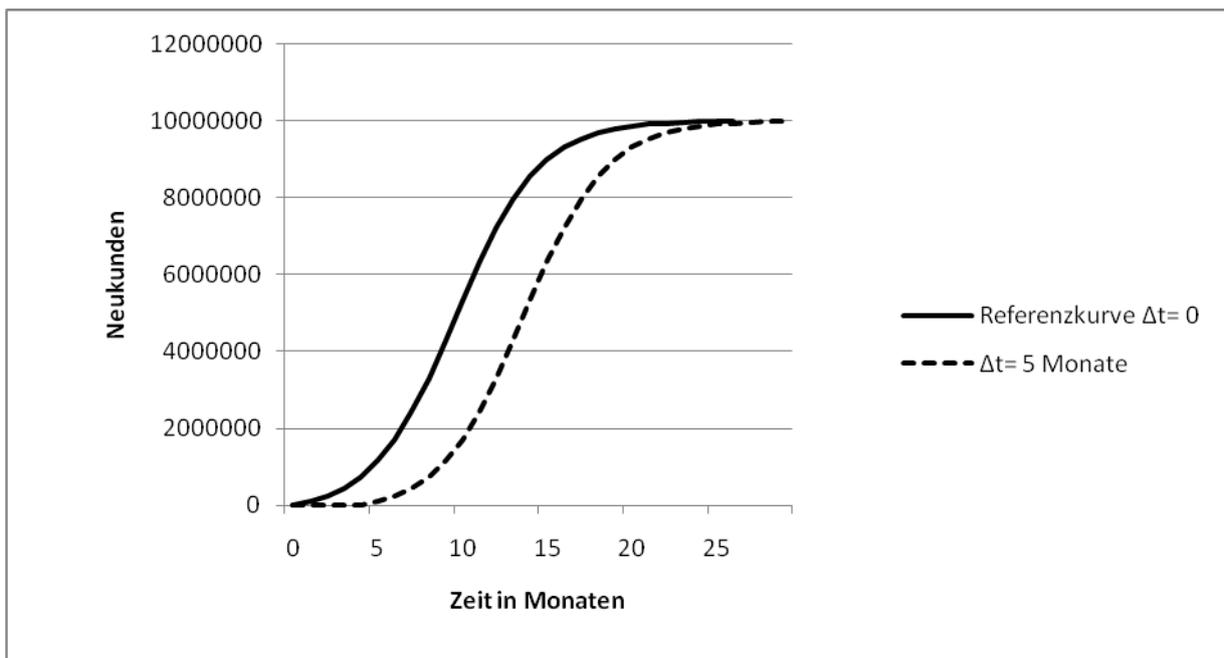
Die Zeitvarianz entsteht durch die Unmöglichkeit, alle äußeren und inneren Freiheitsgrade der betriebswirtschaftlichen Einflüsse festzulegen. Zeitliche Änderungen bei Nachfrage und Wünschen von Kunden, Marktanteil, Markteintritt und Konkurrenz stellen nicht präparierbare Randbedingungen und Ursachen der Zeitvarianz dar. Für die zu erwartenden Umsätze ist die Verspätung kritisch.

## 4.2 Dynamisches Systemmodell

### 4.2.1 Zeitinvariantes Verhalten

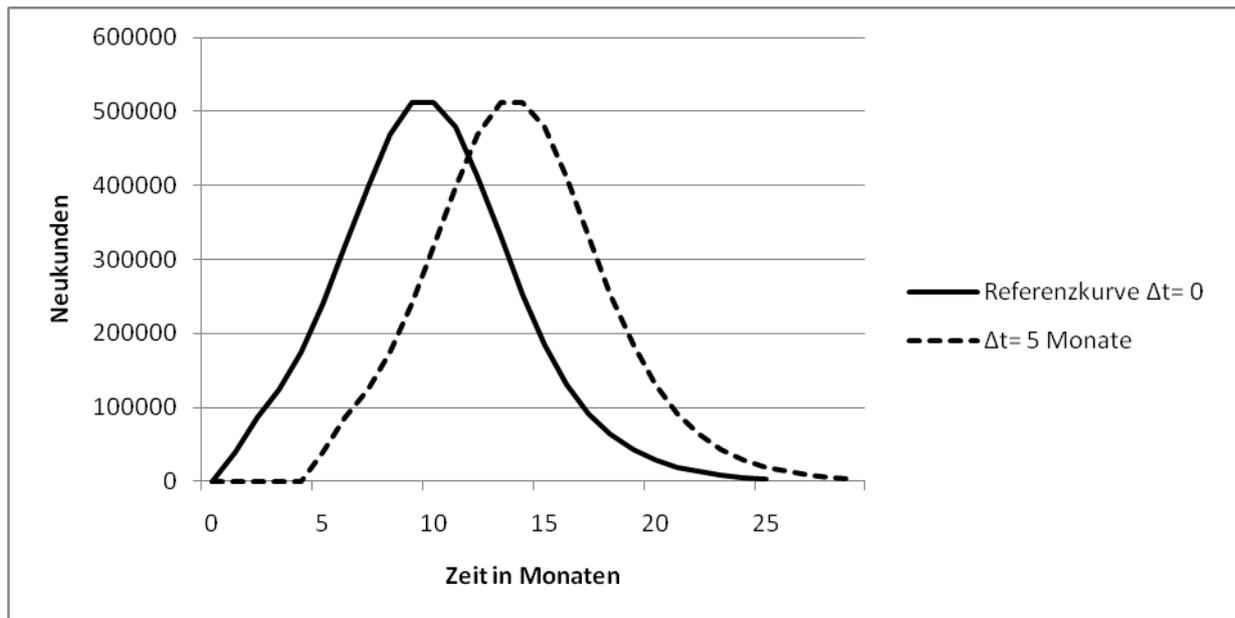
Zur Berechnung der Neukäufer  $n_t$  und der kumulierten Käuferzahl  $N_t$  wurde das Systemmodell der Abbildung 2 verwendet. Zur Darstellung der Zeitinvarianz agiert der zweite Betrieb als Angebotsmonopolist. Dazu werden die Parameter  $p_A$  und  $q_A$  auf Null gesetzt. Damit werden alle weiteren Randbedingungen ( $M$ ,  $p_B$ ,  $q_B$ ) in der Modellmodifikation als Konstanten behandelt. Sie sind zeitunabhängig. Der Produktlebenszyklus hat eine Dauer von etwa 25 Monaten und beginnt zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Referenzkurve nach einer Zeitverschiebung von fünf Monaten ( $\Delta t$ )).

Abbildung 3 zeigt die kumulierte Käuferzahl und Abbildung 4 die Zahl der Neukäufer für einen verzögerten Markteintritt ( $\Delta t = 5$  Monate) im Vergleich zum sofortigen Markteintritt.



**Abb. 3:** Zeitliche Entwicklung der kumulierten Käuferzahl für einen nicht bzw. um fünf Monate verzögerten Markteintritt eines Angebotsmonopolisten

Die Verzögerung bewirkt eine Verschiebung der Kurven um fünf Monate. Die kumulierte Käuferzahl ändert sich pro Zeiteinheit nicht, sondern ist nur um fünf Monate zeitverschoben. Ein solches Verhalten wird als zeitinvariant bezeichnet.



**Abb. 4:** Zeitliche Entwicklung der Neukäufer für einen nicht bzw. um fünf Monate verzögerten Markteintritt für ein Angebotsmonopol

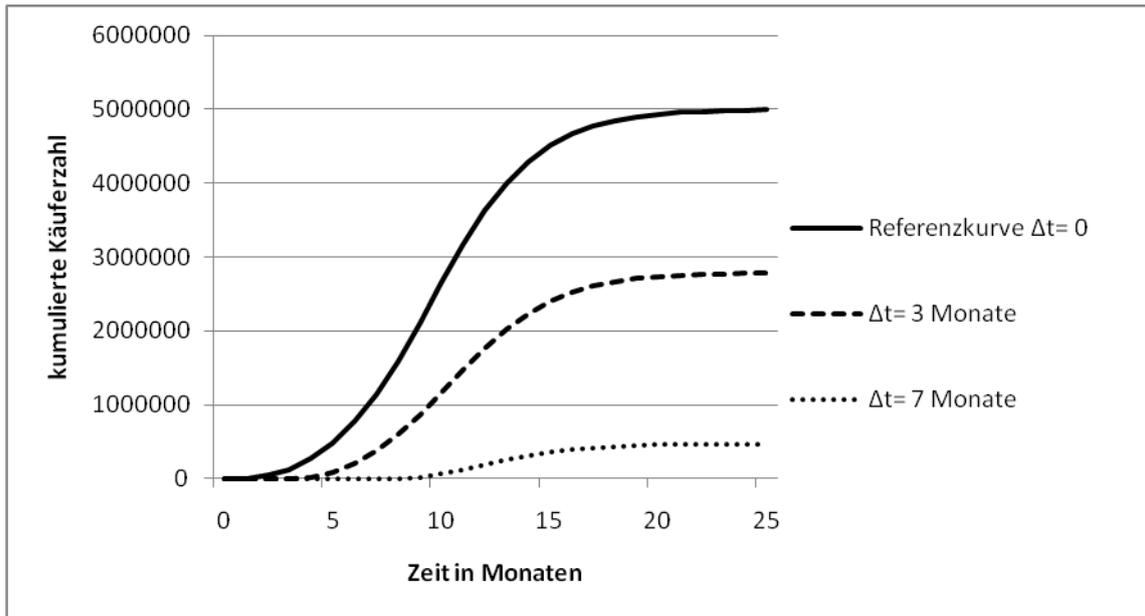
Das zeitinvariante Verhalten des Systems entsteht unter der Voraussetzung, dass alle Randbedingungen ( $M$ ,  $p$ ,  $q$ ) des Systems nicht explizit von der Zeit abhängig sind. Das Ergebnis entspricht dem funktionalen Ansatz  $N(t) = M \cdot f(t)$  im Kapitel 4.1.1.

#### 4.2.2 Zeitvariantes Verhalten

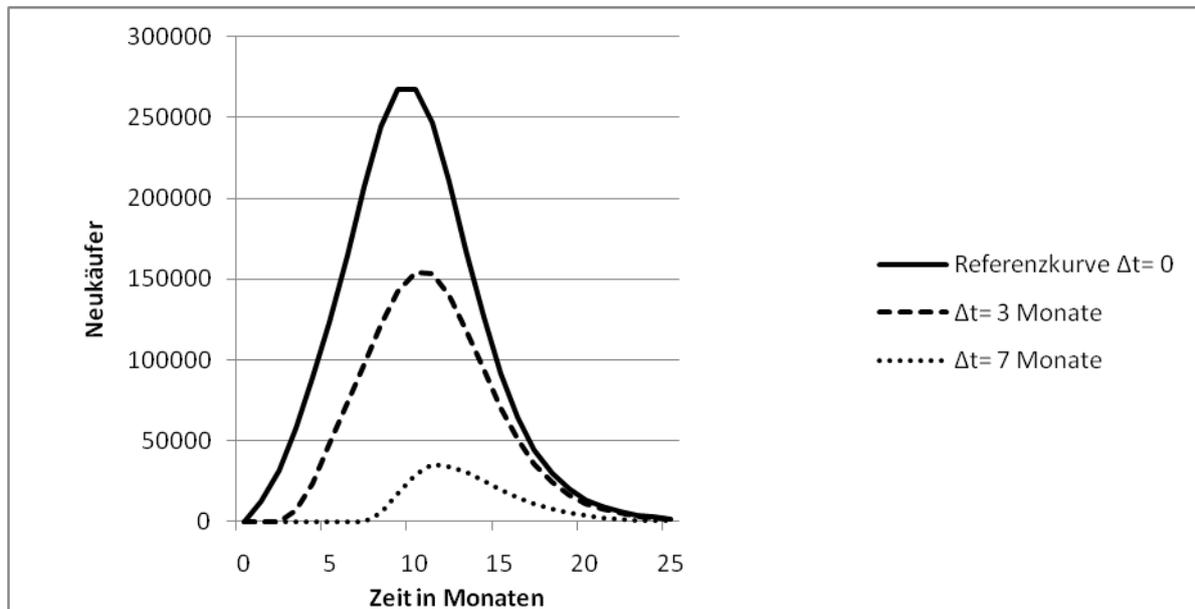
Zum Nachweis des Falles der Zeitvarianz des Produktlebenszyklus wurde das Systemmodell aus Abbildung 2 verwendet und wie folgt spezifiziert:

- Zwei Betriebe agieren am Markt.
- Die Innovationskoeffizienten  $p_A$  und  $p_B$  sind gleich.
- Der Betrieb A bringt das Produkt erst 3 Monate bzw. 8 Monate später auf den Markt. In diesem Zeitraum kaufen die potenziellen Kunden nur beim Betrieb B und scheiden als Käufer aus. Für den Produktlebenszyklus des zweiten Betriebes wird dadurch eine zeitliche Veränderung des Potentials an Kunden ( $M = f(t)$ ) erzeugt.

Abbildung 5 zeigt die kumulierte Käuferzahl und Abbildung 6 die Zahl der Neukäufer für einen verzögerten Markteintritt des zweiten Betriebes im Vergleich zum sofortigen Markteintritt.

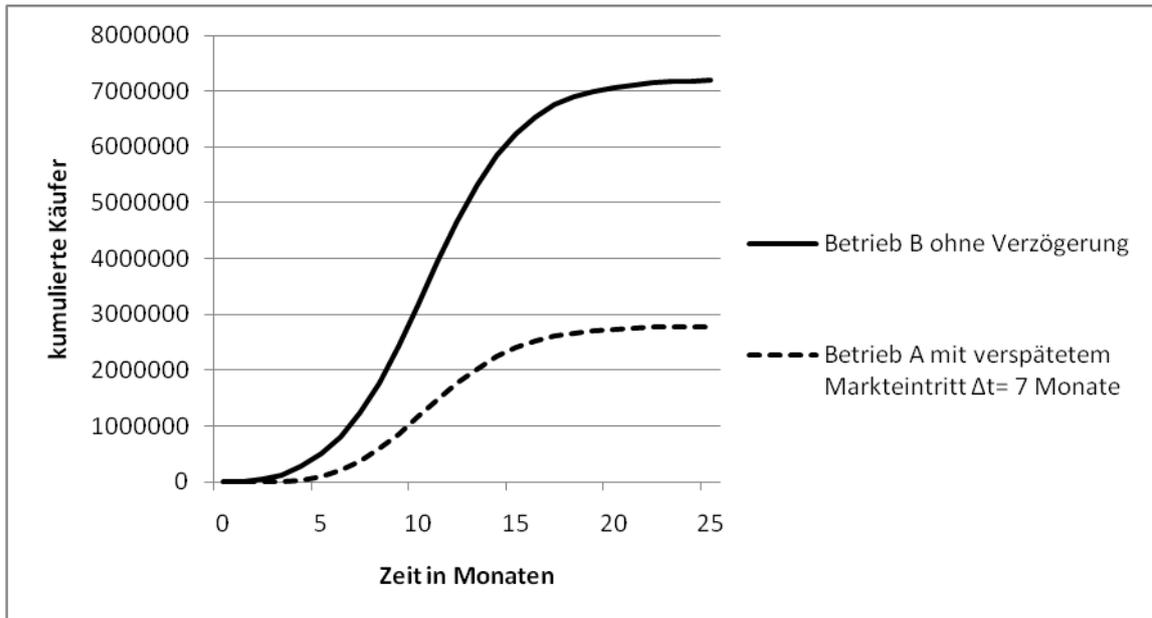


**Abb. 5:** Kumulierte Käuferzahl für den Betrieb A bei verzögertem Markteintritt von  $\Delta t = 0$ ,  $\Delta t = 3$  Monate und  $\Delta t = 7$  Monate

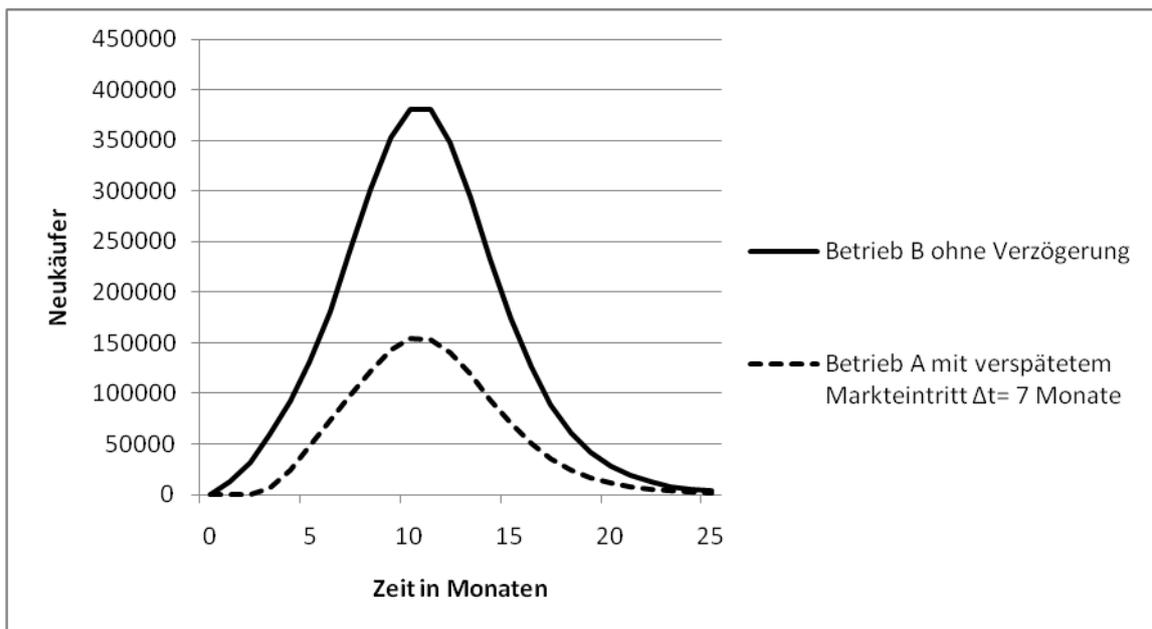


**Abb. 6:** Zeitliche Entwicklung der Neukäufer für den Betrieb A bei verzögertem Markteintritt von  $\Delta t = 0$ ,  $\Delta t = 3$  Monate und  $\Delta t = 7$  Monate

Die Verzögerungen bewirken neben einer Verschiebung der Kurven um die eingegebene Zeitverschiebung auch die Änderungen der Gesamtkäufer. Je später der zweite Betrieb die Produkte verkauft, umso kleiner sind seine gewonnenen Gesamtkäufer (Abbildung 7) und Neukäufer (Abbildung 8) bezogen auf sein Konkurrenzunternehmen (Betrieb B).



**Abb. 7:** Kumulierte Käuferzahl bei verspätetem Marktzugang des Betriebes A von  $\Delta t = 7$  Monaten bezogen auf ein Konkurrenzunternehmen des Betriebes B



**Abb. 8:** Zeitliche Entwicklung der Neukäufer bei verspätetem Markteintritt des Betriebes A von  $\Delta t = 7$  Monaten bezogen auf den Betrieb B

Die kumulierte Käuferzahl und die Zahl der Neukäufer sind vom Eintrittszeitpunkt des Betriebs A abhängig. Der Produktlebenszyklus ist zeitvariant. Zeitinvariantes Verhalten entsteht durch die zeitliche Abhängigkeit der Randbedingungen  $M = M(t)$ . Da potenzielle Käufer nur einmal im Modell kaufen, verändert sich ihre Zahl bei späterem Markteintritt des Betriebs A. Das Ergebnis entspricht dem des funktionalen Ansatzes  $N(t) = M(t) \cdot f(t)$  im Kapitel 4.1.2.

## 5 Zusammenfassung

Mathematische Untersuchungen zur Varianz bzw. Invarianz der Absatzfunktionen des Produktlebenszyklus wurden durchgeführt und mit Erfahrungen aus dem Marketing und Innovationsmanagement zur Produkteinführung verglichen.

Auf der Basis des semilogistischen Diffusionsmodells von Rogers, den Absatzfunktionen von Bass und des Programms für Dynamic Systems „Vensim PLE“, das an die Belange des Artikels angepasst wurde, konnten unterschiedliche Zeitverhalten von Produktlebenszyklen qualitativ und quantitativ bestimmt werden.

### Es ergaben sich folgende Resultate:

- Zeitinvarianz entsteht, wenn die Absatzfunktion nur von der Variablen Zeit abhängig ist. Für den Produktlebenszyklus, bei Monopolstellung, bedeutet diese Eigenschaft, dass der verspätete Markteintritt zu zeitlichen Verschiebungen des „Neukäuferzuflusses“ und der „kumulierten Käuferzahl“ führt. Für die zu erwartenden Umsätze ist die Verspätung unkritisch.
- Die Zeitvarianz entsteht durch die Unmöglichkeit, alle äußeren und inneren Freiheitsgrade der betriebswirtschaftlichen Einflüsse festzulegen. Zeitliche Änderungen bei Nachfrage und Wünschen von Kunden, Marktanteil, Markteintritt und Konkurrenz stellen nicht präparierbare Randbedingungen und Ursachen der Zeitvarianz dar. Der verspätete Markteintritt führt zur Verringerung des Umsatzes.
- Quantitative Aussagen zur Marktkonkurrenz können für verschiedene Szenarien der Absatzentwicklung durch Verwendung des dynamischen Systemmodells mit zwei konkurrierenden Unternehmen ermittelt werden.
- Unterschiedlichen Handlungsstrategien werden im Modell durch zeitliche Anpassung der externen und internen Koeffizienten oder der Zahl der potenziellen Kunden simuliert, sodass eine optimale Marketingstrategie für das Unternehmen ermittelt werden kann. Diese Sachverhalte sind Gegenstand für weitere Untersuchungen.
- Die Ergebnisse tragen zum Verständnis realer Entwicklungen von Produktlebenszyklen bei und beschreiben Umstände, die zum Marktversagen der Produkte führen können.

## Literatur

Bass, Frank M. (1969), A new product growth for model consumer durables: Management Science 15: S. 215-227.

Bossel, Hartmut (2004), Systeme, Dynamik und Simulation: Books on Demand GmbH Norderstedt.

Glochla, Erwin (Hrsg.) (1977), Zeitvarianz betrieblicher Systeme: Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.

Forrester, Jay W. (1972), Grundzüge einer Systemtheorie: Gabler Verlag, Wiesbaden.

Henderson, Bruce D. (1974), Die Erfahrungskurve in der Unternehmensstrategie: Frankfurt a. M.

Herold, Jörg, Völker, Lutz (2010), Zufall und Notwendigkeit - Untersuchungen zur mathematischen Modellierung des Produktlebenszyklus: Jenaer Beiträge zur Wirtschaftsforschung Heft 2 (2010), Fachbereich BW, Fachhochschule Jena.

Kornwachs, Klaus (2001), Logik der Zeit – Zeit der Logik: Verlag LIT, Münster u. a.

Meffert, Heribert (1991), Marketing: Gabler Verlag, 7. Auflage.

Stern, Thomas, Jaberg, Helmut (2010), Erfolgreiches Innovationsmanagement: Gabler Verlag, Wiesbaden, 4. Auflage.

Rogers, Everett M. (2003), Diffusion of Innovations: New York u. a., 5. Auflage.

Russell, Bertrand (2009), Philosophie des Abendlandes: Europaverlag Zürich, 2. Auflage

Ventena Systems, Inc. (2009), Vensim PLE: <http://www.vensim.com/index.html>, 10.03.2011.

Weiber, Rolf (1993), Chaos: Das Ende der klassischen Diffusionsmodellierung?: Marketing ZfP 1, S. 35–46.

Wöhe, Günter, Döring Ulrich (2010), Einführung in die allgemeine Betriebswirtschaft: Verlag Vahlen, 24. Auflage

## Arbeitspapiere der IUBH Duales Studium

- Nr. 1 Prof. Dr. Jörg Herold/Kerstin Polzin:  
Betriebswirtschaftliche Auswirkungen der Kulturförderabgabe am Beispiel der Stadt Weimar/Thüringen
- Nr. 2 Prof. Dr. Jörg Herold/Prof. Dr. Hans-Gert Vogel:  
Kulturförderabgabe für Übernachtungen? – Eine kurze rechtliche Bewertung der „Bettensteuer“
- Nr. 3 Prof. Dr. Hans-Gert Vogel:  
Anleihen als Finanzierungsinstrument mittelständischer Unternehmen – Verbesserter gesetzlicher Rahmen und offene Fragen (teilweise publ. in: „Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft“ – ZBB 3/2010, S. 211 ff., und teilweise zur Veröffentlichung vorgesehen in: „Berliner Kommentar zum Schuldverschreibungsgesetz“, Erscheinen voraussichtlich Februar 2011)
- Nr. 4 Katrin Witte/Prof. Dr. Hans-Gert Vogel:  
Umstrukturierung von Stiftungen im Gesundheitswesen – Rechtsfragen bei der Ausgliederung von Krankenhaus- und Pflegeheimbetrieben (zur Veröffentlichung vorgesehen in: „Gesundheitsrecht“ – GesR, März 2011)
- Nr. 5 Prof. Dr. Jörg Herold/Kerstin Polzin:  
Reversibilität und Irreversibilität – Mathematische Untersuchungen zum Zeitverhalten des Produktlebenszyklus
- Nr. 6 Prof. Dr. Jörg Herold/Dipl.-Kfm. Lutz Völker, LL. B.:  
Zufall und Notwendigkeit – Mathematische Untersuchungen zur Modellierung der Diffusion von Innovationen
- Nr. 7 Prof. Dr. Jörg Herold/Kerstin Polzin:  
Zeitvarianz und Zeitinvarianz – Mathematische Untersuchungen zum Zeitverhalten des Produktlebenszyklus
- Nr. 8 Prof. Dr. Herold/Dipl.-Kfm. Lutz Völker, LL. B.:  
Tarifeinheit oder Tarifpluralität – quo vadis Tarifrecht?
- Nr. 9 Prof. Dr. Herold  
Systemsimulation einer Steuerkanzlei – Optimierung der Kommunikationspolitik in der Start-up-Phase